CTD 2: Automates finis déterministes

BUT 2 – Automates et Langages – R4.A12

Définition 1 (Automate fini déterministe (AFD))**.** Un **automate fini déterministe (AFD)** A est un quintuplet $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ où

— Q est un ensemble fini d'états ;

— Σ est un alphabet ;

— $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition ;

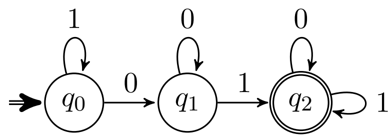
— $q_0 \in Q$ est l'état initial ;

— $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états acceptants ou finaux.

On représente en général les AFD sous forme graphique. Dans ces graphes, chaque noeud correspond à un état et, à chaque transition $\delta(q_1, a) = q_2$, on associe un arc étiqueté par a du noeud correspondant à q_1 vers le noeud correspondant à q_2. Par ailleurs, on indique par une double flèche l'état initial et par un double cercle, les états finaux. Par exemple, l'automate $A_0 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma_{\mathbb{B}}, \delta, q_0, \{q_2\})$ où

δ	0	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
q_2	q_2	q_2

est représenté ainsi :



Les automates sont utilisés pour reconnaître des mots en partant de l'état initial et en appliquant la fonction de transition successivement à chaque symbole du mot (en commençant par le premier symbole) pour atteindre un état final. Si un état final n'est pas atteint, alors le mot n'est pas reconnu.

Définition 2 (Langage reconnu)**.** $\hat{\delta}$ est l'extension de la fonction de transition δ aux mots, et est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \hat{\delta} : Q \times \Sigma^* & \to & Q \\ (q, \epsilon) & \mapsto & q \\ (q, xw) & \mapsto & \hat{\delta}(\delta(q, x), w) \end{array}$$

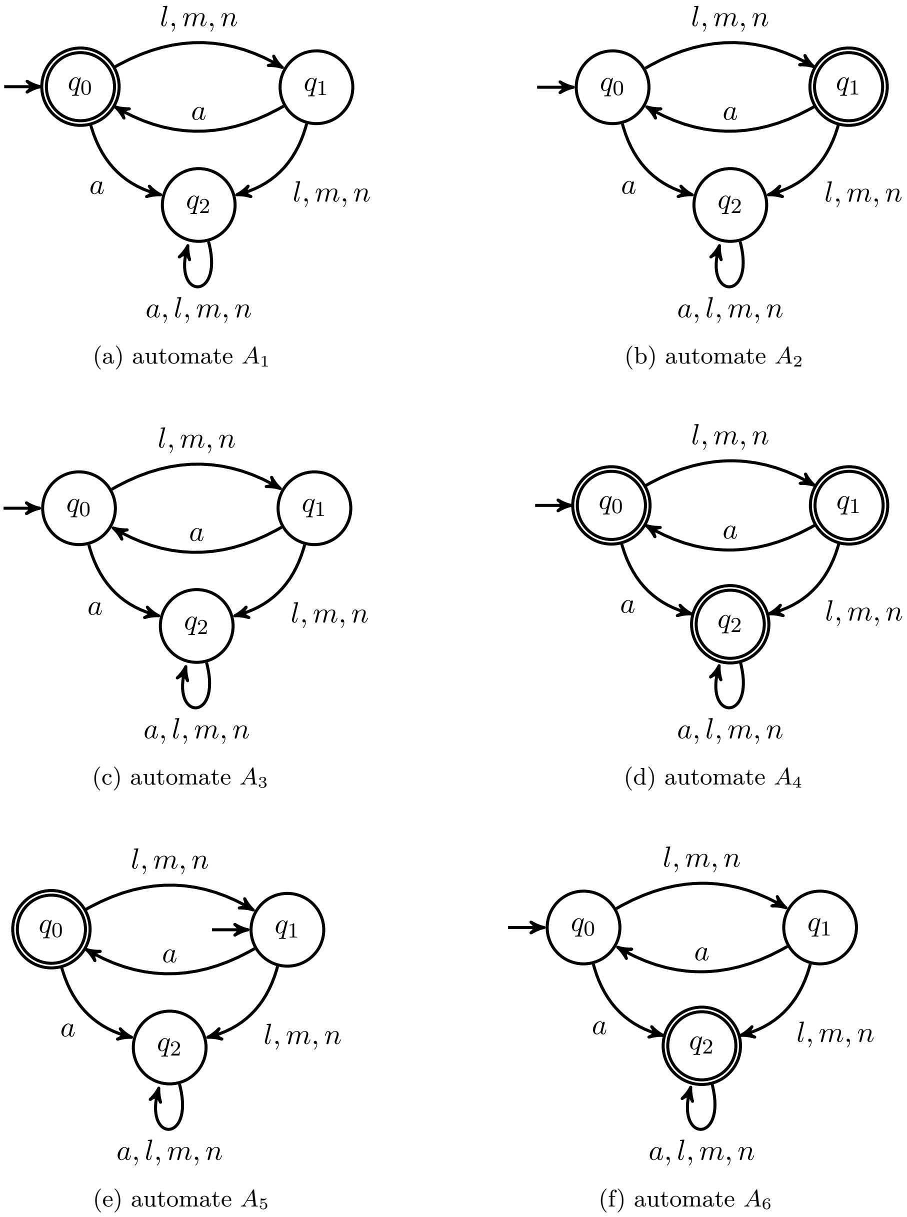
Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD, le **langage reconnu** par A, noté $\mathcal{L}(A)$, est défini par

$$\mathcal{L}(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

Exercice 1. Pour la fonction δ de l'automate A_0 défini précédemment, déterminez

1. $\hat{\delta}(q_0, \epsilon)$
2. $\hat{\delta}(q_0, 1)$
3. $\hat{\delta}(q_0, 010)$

Définition 3 (Langage reconnaissable)**.** On dit qu'un langage L est **reconnaissable** s'il existe un AFD A tel que $\mathcal{L}(A) = L$.



(a) automate A_1 (b) automate A_2 (c) automate A_3 (d) automate A_4 (e) automate A_5 (f) automate A_6

FIGURE 1 – Automates A_1 à A_6

Définition 4 (Automate complétement spécifié)**.** Un automate $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ est dit **complètement spécifié**, ou **complet**, si $dom(\delta) = Q \times \Sigma$.

Exercice 2. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$.

1. Écrivez formellement, puis dessinez, un automate, le plus simple possible, qui reconnaît le langage ne contenant que le mot *abc*.
2. Écrivez l'automate complet équivalent.

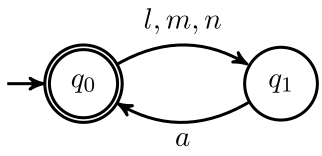
Exercice 3. Soit $\Sigma = \{1, 2, 3\}$. Dessinez un automate sur Σ qui reconnaît

1. tous les mots possibles sur son alphabet ;

2. le langage vide ;
3. le langage formé des mots commençant par un 1 ;
4. le langage formé des mots commençant et terminant par un 1 ;
5. le langage formé des mots commençant et terminant par un 1 et ne contenant pas de 2 ;
6. le langage formé des mots commençant et terminant par un 1 et ne contenant pas la sous-chaîne 11.

Exercice 4. On considère les automates de la figure 1 :

1. Considérons tout d'abord l'automate A_1. Comment sont lus les mots : *lama*, *maman*, *laamll*, ϵ ? Quels sont ceux qui sont acceptés ?
2. Mêmes questions pour A_1' ci-dessous :



   Attention, il s'agit cette fois d'un AFD mais non complet.
3. Quel est le langage reconnu par A_1 et par A_1' ?
4. Pour chacun des 5 automates A_2 à A_6, donnez une expression si possible rationnelle du langage qu'il reconnaît.
5. Proposez un automate qui reconnaît le même langage que A_3 mais qui soit plus simple. Même question pour A_4.

Exercice 5. On considère l'alphabet $\Sigma_{\mathbb{B}} = \{0, 1\}$.

1. Donner un automate qui reconnaît les mots de Σ^* qui ont au moins 2 lettres.
2. Donner un automate qui reconnaît les mots de Σ^* qui ont un nombre pair de 1.
3. Donner un automate qui reconnaît les mots de Σ^* qui ont un nombre pair de 1, et pair de 0.

Exercice 6. On considère l'alphabet $\Sigma = \{/, *, a, b, \cdots, z\}$. Construire un automate déterministe qui reconnaît le langage des commentaires en C. Un commentaire est une suite de caractères sur Σ, délimitée par `/*` et `*/`, et ne contenant pas `*/`.

Exercice 7. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, \cdots, z\}$. Construire un automate déterministe qui reconnaît les mots qui ont `rire` comme facteur.

Exercice 8. On considère un AFD complet à 2 états $A = (\{a, b\}, \{q_0, q_1\}, q_0, F, \delta)$. Sachant que $aba \in \mathcal{L}(A)$, $aa \in \mathcal{L}(A)$ et $baa \notin \mathcal{L}(A)$, on veut déterminer l'automate A.

1. Trouvez (en justifiant) l'état $\delta(q_0, b)$.
2. Montrer que $\delta(q_0, a) \neq \delta(q_1, a)$.
3. En déduire l'état $\hat{\delta}(q_0, aa)$.
4. Trouver l'automate A.