CTD 3 bis: Minimisation d'AFD

BUT 2 – Automates et Langages – R4.A12

Définition 1 (Équivalence d'états)**.** Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD. Deux états p et q sont dits **équivalents**, noté $p \equiv q$, si pour tout mot w, $\hat{\delta}(p, w) \in F$ ssi $\hat{\delta}(q, w) \in F$.

On notera $[p]_\equiv$ la classe d'équivalence de p, c'est-à-dire $[p]_\equiv = \{q \in Q \mid p \equiv q\}$.

Définition 2. Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD complet dont chaque état est accessible depuis q_0. L'automate **minimal** associé à A est défini par l'AFD $A_{min} = (Q', \Sigma, \delta', [q_0]_\equiv, F')$ où

— $Q' = Q/\equiv = \{[q]_\equiv \mid q \in Q\}$

— $\delta' = \{([p]_\equiv, a) \mapsto [q]_\equiv \mid \exists p' \in [p]_\equiv, \exists q' \in [q]_\equiv \ t.q.\ \delta(p', a) = q'\}$

— $F' = F/\equiv = \{[q]_\equiv \mid q \in F\}$

Propriétés 1. $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A_{min})$

Propriétés 2 (A_{min} est minimal)**.** Soit A' un AFD complet t.q. $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$, alors A' possède au moins autant d'états que A_{min}.

Propriétés 3 (Unicité de l'automate minimal)**.** Tous les AFD complets A' ayant autant d'états que A_{min} avec $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$ sont identiques au renommage près des états.

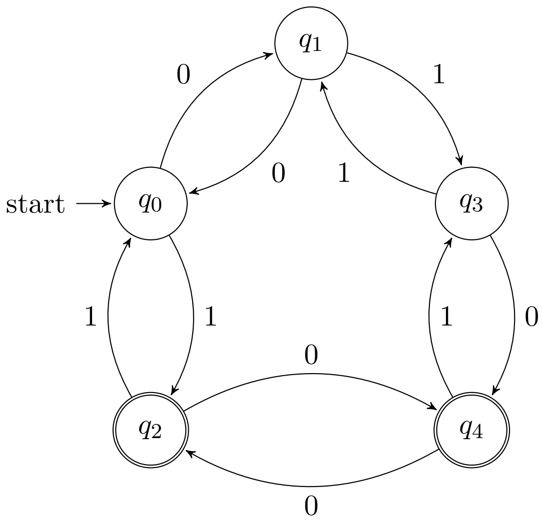
Étant donné un AFD complet A, sa minimalisation consiste à construire l'équivalence $\equiv$ de façon inductive, en construisant une série d'équivalences $\equiv_0$, $\equiv_1$, …, $\equiv_i$, jusqu'à atteindre une équivalence $\equiv_n$ pour laquelle $\equiv_n = \equiv_{n+1}$. Ces équivalences sont définies ainsi :

— $p \equiv_0 q$ ssi $(p \in F$ et $q \in F)$ ou $(p \notin F$ et $q \notin F)$

— $p \equiv_0 q$ (pour $i > 0$) ssi $p \equiv_{i-1} q$ et $\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \equiv_{i-1} \delta(q, a)$

L'induction termine quand $\equiv_i = \equiv_{i-1} = \equiv$.

Exercice 1. Minimisez l'automate suivant :



Exercice 2. Minimisez l'automate suivant :