Compléments sur les automates et langages rationnels

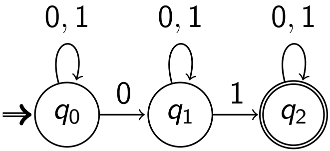
Définitions CDN

Frédéric Guyomarch et Cédric Lhoussaine

24 février 2025

iut | Université de Lille

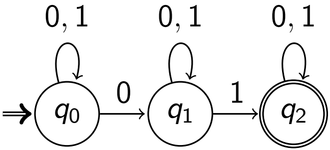
Définitions



Un automate fini **non-déterministe** est représenté par :

- $Q = q_0, q_1, q_2$ est un ensemble fini d'états ;
- Σ est l'alphabet ;
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ est une fonction de transition ;
- $Q_0 \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux ;
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états acceptants ou finaux.

Définitions



Focus sur la fonction de transition :
$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

δ	0	1
q_0	q_0, q_1	q_0
q_1	q_1	q_1, q_2
q_2	q_2	q_2

Définitions

Extension aux mots

$$\begin{array}{rcl} \hat{\delta} : Q \times \Sigma^* & \to & 2^Q \\ (q, \epsilon) & \mapsto & \{q\} \\ (q, xw) & \mapsto & \bigcup_{q' \in \delta(q,x)} \hat{\delta}(q', w) \end{array}$$

Langage reconnu par un AFN

Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ un AFN, le **langage reconnu** par A, noté $\mathcal{A}$, est défini par

$$\mathcal{A} = \{w \mid \exists q_0 \in Q_0,\ \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Exercices

Théorème de Kleene

Énoncé

Les langages **reconnaissables** par automates finis (déterministes ou non) sont exactement les langages **rationnels**.

Preuve

Preuve constructive en composant des automates pour rationnels $\subseteq$ reconnaissables. Résolution d'équations pour reconnaissables $\subseteq$ rationnels.

Lemme de l'étoile

Lemme de l'étoile (ou de la pompe)

Soit L un langage rationnel, il existe une constante n (qui dépend de L) telle que pour ton mot w pour lequel $|w| \geq n$, w peut être décomposé en 3 mots $w = v_1 u v_2$ tels que :

Lemme de l'étoile

Application

le langage $L = \{a^n b^n | n \neq 0\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ n'est pas un langage rationnel.

Preuve

La preuve découle de l'équivalence langages rationnels et langages reconnaissables.